Bei *a* ein Zahn des Blattrandes, an dem der Tropfen Flüssigkeit hervortritt. Die Gefässbündel machen unter dieser Stelle einen bedeutenden Knoten.

Fig. 18. Querschnitt eines Gefässbündels dieser Pflanze nächst dem Zahne in 360maliger Vergrösserung:

a) Spiralgefässe gewöhnlicher Art.

b) Bastzellen.

c) Cambiumzellen.

Über die graphische Hyperbel-Methode.

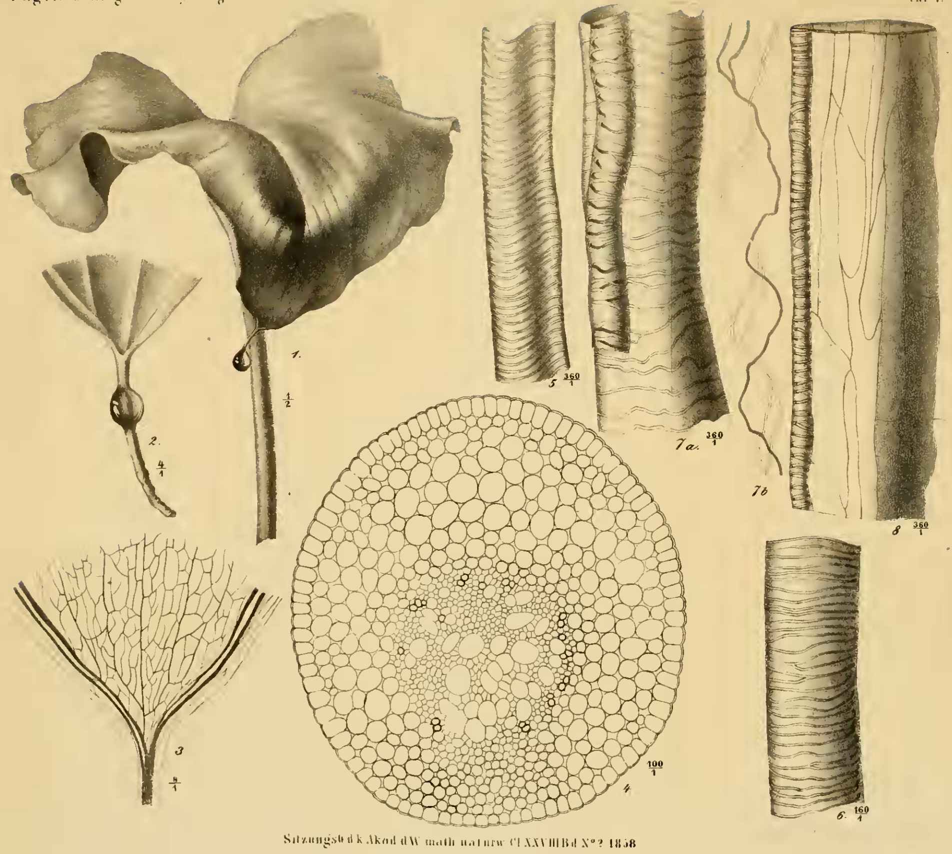
Von **Leander Ditscheiner.**

(Mit 2 Tafeln.)

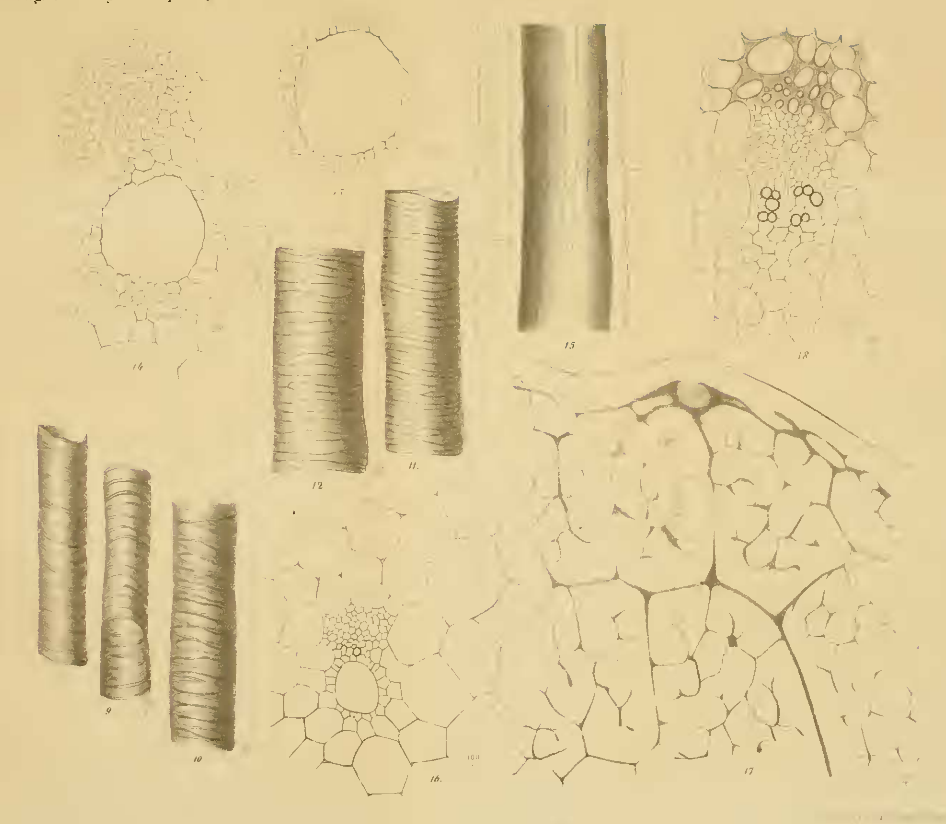
(Vorgetragen in der Sitzung am 22. October 1857.)

Zwei graphische Methoden der Krystallographie hatte ich bereits die Ehre der hochverehrten mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften vorzulegen. Es sind dies die „graphische Kreis-Methode“ und die „graphische Parabel-Methode“. Ich erlaube mir nun mit Gegenwärtigen der hochverehrten Classe eine dritte solche Methode, nämlich die „graphische Hyperbel-Methode“, vorzulegen.

Die „graphische Hyperbel-Methode“ ist die sechste in der Reihe der graphischen Methoden der Krystallographie. Bei ihr erscheinen die Flächen ähnlich wie bei der Neumann'schen „graphischen Linien-Methode“, der „graphischen Ellipsen“ und der „graphischen Kreis-Methode“, durch Punkte repräsentirt, sie unterscheidet sich jedoch von allen genannten graphischen Methoden dadurch, dass der Inbegriff aller Flächenorte einer Zone, also die Zonenlinie, nicht wie bei diesen eine gerade Linie, ein Kreis oder eine Ellipse, sondern eine Hyperbel ist, und in gewissen, jedoch nur speciellen Fällen, auch eine Parabel sein kann, deren Axe dann stets mit der Coordinatenaxe Oy zusammenfällt. Jede Hyperbel in dem Schema hat ihren eigenen, von den Abmessungen der die Zone bestimmenden Gestalten abhängigen Mittelpunkt, und nur für den Fall, dass der Mittelpunkt der graphischen Zonenlinie der „graphischen Kreismethode“



Sitzungsb. d. k. Akad. d. W. math. naturw. Cl. XXVIII. Bd. N° 2. 1858.


14
15
18
12
11
9
10
16.
17



in die Richtung der Ox fällt, ist der Mittelpunkt der Hyperbel mit dem Coordinaten - Mittelpunkt übereinstimmend. Die eine der Assymtoten der Hyperbel ist immer eine verticale, also zu der Coordinatenaxe Oy parallele Linie, während die zweite Assymtote keine solche bestimmte Lage hat und von den, die Zone bestimmenden Gestalten abhängig ist. Die Neigung der Assymtoten gegen einander wird nur durch eine Coordinate des Mittelpunktes der Zonenlinie der „graphischen Kreismethode“ bestimmt. Alle jene Zonenlinien, bei welchen diese Coordinate gleich ist, haben also die Neigung der Assymtoten, oder was dasselbe, das Axenverhältniss gleich. Die Mittelpunkte derselben sind aber dennoch verschieden. Für den Fall, dass diese Coordinate 0 wird, geht die Hyperbel in eine Parabel über.

§. 1.

Wir beginnen auch hier wieder mit der Bestimmung der Lage des Flächenortes. Wir denken uns zu diesem Behufe zu derjenigen Krystallfläche, von welcher der Flächenort bestimmt werden soll, eine parallele Ebene durch einen von O aus in einer senkrechten Entfernung $= 1$ gelegenen Punkt A Fig. 1 gelegt, so ist diese Ebene ABC. Denn denken wir uns durch die beiden Punkte A und O eine auf die Linie BC senkrecht stehende Ebene gelegt, welche die Ebene ABC nach der Linie AS und jene Oxy nach der Linie OS schneidet, so ist offenbar die Linie AS die „Linie des stärksten Falles“ unserer Ebene ABC. Dann denken wir uns durch den Punkt P, welcher sich in der Richtung von Oy und von O aus in der Entfernung $OP = 1$ befindet, eine zur Ebene Oxy parallele Ebene $MNPQ$ gelegt, welche Ebene unsere Projections-Ebene ist, und den Durchschnitt unserer Linie AS mit derselben gesucht, der sich z. B. in R ergibt, so ist dann R der gesuchte Flächenort unserer Ebene ABC. Der Flächenort der „graphischen Hyperbel-Methode“ ist also ein Punkt und darin kommt sie mit der graphischen Linien-, Kreis- und Ellipsenmethode überein.

Der Punkt R ist auf unserer Projections-Ebene bestimmt durch seine Coordinaten PT und RT. Wir wollen nun sogleich dieselben bestimmen, wenn die Ebene, deren Flächenort bestimmt werden soll, als gegeben angesehen werden kann.

Es sei zu diesem Behufe $a_1 : b_1 : c_1 = 1 : mb : nc$ unsere Fläche, so sind, wenn O der Coordinaten-Mittelpunkt ist, die Coordinaten von A und S folgende:

$$A\,;\; x_{,} = 0 \;\;;\; y_{,} = 0 \;\;;\; z_{,} = 1\,;$$
$$S\,;\; x_{,,} = OU;\; y_{,,} = SU;\; z_{,,} = 0\,;$$

oder wenn man für OU und SU die ihnen entsprechenden Werthe von:

$$OU = \frac{mn^2}{m^2+n^2}\;;\; SU = \frac{m^2n}{m^2+n^2}$$

setzt, so sind auch die Coordinaten für S folgende Grössen:

$$S\,;\; x_{,,} = \frac{mn^2}{m^2+n^2}\;;\; y_{,,} = \frac{m^2n}{m^2+n^2}\;;\; z_{,,} = 0.$$

Die durch A und S gehende Linie ist aber die Linie des stärksten Falles unserer Ebene $a_1 : b_1 : c_1 = 1 : mb ; nc$, und hat die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\,x_{,,}\,(z-1) \\ y &= -\,y_{,,}\,(z-1) \end{aligned}\right\}.$$

Ihr Durchschnittspunkt mit der Ebene $MNPQ$, deren Gleichung ist:

$$y = 1,$$

ist aber bestimmt durch folgende Coordinaten:

$$x = \frac{x_{,,}}{y_{,,}}\;;\; z = \frac{y_{,,}-1}{y_{,,}}\;;$$

oder wenn wir statt $x_{,,}$ und $y_{,,}$ die ihnen entsprechenden Werthe setzen, so erhalten wir:

$$x = \frac{n}{m}\;;\; z = \frac{m^2n - (m^2+n^2)}{m^2n},$$

da wir aber in unserem Schema den Punkt N fernerhin als den Coordinaten-Mittelpunkt ansehen wollen, und ausserdem die verticale Coordinate z als jene y ansehen, so haben wir in diesem Falle statt z, $1-y$ zu setzen, wornach die Coordinaten unseres Punktes R folgende sind:

$$x = \frac{n}{m}\;;\; y = \frac{m^2+n^2}{m^2n}.$$

Es kann somit keiner Schwierigkeit unterliegen, jede gegebene Fläche ins Schema einzutragen und gehörig zu verzeichnen.

§. 2.

Nachdem wir nun gesehen haben, welche Lage die Flächenorte besitzen, so wollen wir nun jetzt untersuchen, wie sich die Flächenorte einer und derselben Zone gegen einander verhalten und welche Lage sie gegen einander einnehmen, d. h. wir wollen die Form und Lage der Zonenlinie bestimmen.

Da der Punkt S Fig. 1 nichts anderes als der Flächenort nach der „graphischen Kreismethode" ist, so folgt, dass alle die Punkte, die einer und derselben Zone angehören, in einer Kreislinie liegen müssen, die durch den Punkt O geht. Es liegen also auch alle jene Flächenlinien des grössten Falles, deren Flächen in einer Zone liegen, in einem Kegel, welchen wir den Zonenkegel nennen wollen, dessen Spitze der Punkt A und dessen Leitlinie die Zonenlinie nach der „graphischen Kreismethode" ist. Wir müssen also vorerst die Gleichung dieses Zonenkegels bestimmen und wollen zu diesem Behufe zuerst annehmen, die Spitze des Kegels liege nicht in A, sondern in irgend einem Punkte:

$$M\,;\, x_1\,,\, y_1\,,\, z_1\,,$$

so hat dann jede erzeugende Linie des Kegels die Gleichungen:

$$x - x_1 = a\,(z - z_1) \qquad \text{(Gl. 1)}$$

$$y - y_1 = b\,(z - z_1) \qquad \text{(Gl. 2)}$$

und die Leitlinie unseres Zonenkegels hat die Gleichungen:

$$x^2 + y^2 + 2px + 2qy = 0 \qquad \text{(Gl. 3)}$$

$$z = -1 \qquad \text{(Gl. 4)}$$

Um die Gleichung unseres Zonenkegels zu erhalten, müssen wir nun diese vier Gleichungen gehörig mit einander verbinden. Man hat, wenn man Gl. 4 mit Gl. 1 und Gl. 2 verbindet, folgendes Gleichungssystem:

$$x = x_1 - a\,(1 + z_1) \qquad \text{(Gl. 5)}$$

$$y = y_1 - b\,(1 + z_1) \qquad \text{(Gl. 6)}$$

und wenn man diese beiden Gleichungen mit Gl. 3 verbindet, so erhält man:

$$[x_1 - a(1+z_1)]^2 + [y_1 + b(1+z_1)]^2 + 2p(x_1 - a(1+z_1)] + \\ + 2q(y_1 - b[1+z_1)] = 0. \qquad \text{(Gl. 7)}$$

Aus den beiden Gleichungen 1 und 2 folgt aber:

$$a = \frac{x - x_1}{z - z_1} \text{ und } b = \frac{y - y_1}{z - z}$$

und diese beiden Werthe in Gl. 7 gesetzt, erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{[x_1(z-z_1) - (x-x_1)(1+z_1)]^2}{(z-z_1)^2} + \frac{[y_1(z-z_1) - (y-y_1)(1+z_1)]^2}{(z-z_1)^2} +$$
$$+ 2p \frac{x_1(z-z_1) - (x-x_1)(1+z_1)}{(z-z_1)} + 2q \frac{y_1(z-z_1)(y-y_1)(1+z_1)}{(z-z_1)} = 0$$

oder auch:

$$[x_1(z - z_1) - (x - x_1)(1 + z_1)]^2 + (y_1(z - z_1) -$$
$$- (y - y_1)(1 + z_1)]^2 + 2p(z - z_1)(x_1(z - z_1) -$$
$$- (x - x_1)(1 + z_1)] + 2q(z - z_1)[y_1(z - z_1) -$$
$$- (y - y_1)(1 + z_1)] = 0$$

als die allgemeinste Gleichung unseres Zonenkegels. Um nun die Gleichung unseres Zonenkegels zu erhalten, müssen wir die Spitze desselben von M nach A verlegen, wodurch also:

$$x_1 = 0 , y = 0 , z = 0$$

wird. Modificiren wir unsere allgemeinste Gleichung hiernach, so erhalten wir:

$$x^2 + y^2 - 2pxz - 2qyz = 0$$

als die gesuchte Gleichung unseres Zonenkegels. Der Durchschnitt dieses Zonenkegels mit unserer Projectionsebene ist aber unsere Zonenlinie. Die Gleichung der Projectionsebene ist:

$$y = 1 ,$$

somit, wenn wir diesen Werth in die Gleichung unseres Zonenkegels setzen, wird:

$$x^2 + 1 - 2pxz - 2qz = 0$$

oder in gewöhnlicher Form geschrieben:

$$x^2 - 2pxz - 2qz + 1 = 0$$

die Gleichung unserer Zonenlinie, oder indem wir diese Gleichung auf unsere Projectionsebene beziehen, indem wir statt z das y setzen, haben wir:

$$x^2 - 2pxy - 2qy + 1 = 0 \qquad \text{(Gl. 8)}$$

als die Gleichung unserer Zonenlinie. In dieser Gleichung sind p und q aber nichts anderes, als die Coordinaten des Mittelpnnktes der Zonenlinie der graphischen Kreismethode, welche wir dort als folgende Werthe gefunden haben:

$$p = + \frac{1}{2} \cdot \frac{p'p''(m''n' - n''m')}{m'm''(n'p'' - p'n'')} .$$

$$q = - \frac{1}{2} \cdot \frac{n'n''(m''p' - m'p'')}{m'm''(n'p'' - p'n'')} .$$

Es handelt sich nun darum, zu untersuchen, welche Curve diese Gleichung bestimmt. Eine Kreislinie kann diese Gleichung nicht sein, denn in ihr kommt ein Glied $x \cdot y$ vor, welches in keiner Gleichung einer Kreislinie erscheint. Sondern da sie mit der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades identisch ist, so kann sie nur eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel sein. Dies wird die folgende Gleichung:

$$B^2 - 4AC = 0$$

entscheiden, welche der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Rx + Sy + F = 0$$

entnommen ist. Ist nämlich $a > 0$, so ist die Gleichung jene einer Hyperbel, und da in unserer Gleichung $C = 0$ und B^2 stets > 0 ist, so ist auch die, durch die Gleichung 8 bestimmte Curve eine Hyperbel.

Zone ist also nach der graphischen Hyperbel-Methode der Inbegriff aller jener Flächen, deren Flächenorte in einer Hyperbel liegen.

§. 3.

Wir wollen nun von der eben erhaltenen Gleichung:

$$x^2 - 2pxy - 2qy + 1 = 0 \qquad \text{(Gl. 1)}$$

welche, wie wir eben gesehen haben, die Gleichung einer Hyperbel ist, die Axen a und b bestimmen, so wie auch die Lage ihres Mittelpunktes in Bezug auf unser Coordinatensystem feststellen. Wir

werden hier am besten zum Ziele gelangen, wenn wir die Gleichung 1 so transformiren, dass sie auf die Form:

$$Mx^2 + Ny^2 + P = 0$$

gebracht wird.

Bei dieser Transformirung unseres Coordinatensystems lassen wir vorerst den Coordinaten-Mittelpunkt, drehen aber unser neues Axensystem gegen unser altes, um einen gewissen Winkel α, so haben wir dann in Gleichung 1 zu setzen:

$$x = x \cos \alpha - y \, . \sin \alpha$$
$$y = x \sin \alpha + y \, . \cos \alpha$$

und erhalten dadurch eine neue Gleichung von der Form:

$$Mx^2 + Lxy + Ny^2 + Rx + Sy + F = 0 \qquad \text{(Gl. 2)}$$

wobei zu setzen ist:

$$M = A \cos {}^2\alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin {}^2\alpha$$
$$N = A \sin {}^2\alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos {}^2\alpha$$
$$L = 2A \sin \alpha \cos \alpha - B \sin {}^2\alpha + B \cos {}^2\alpha - 2C \sin \alpha \cos \alpha$$
$$R = D \cos \alpha - E \sin \alpha$$
$$S = D \sin \alpha + E \cos \alpha$$

wobei in Bezug auf unsere obige Gleichung 1 zu setzen ist:

$$A = 1 \; ; B = -2p \; ; C = 0 \; ; D = 0 \; ; E = -2q \; ; F = 1,$$

und wenn wir in diesen Gleichungen:

$$\tang 2\alpha = -\frac{B}{A - C} = + \; 2p,$$

so wird dann offenbar:

$$L = 0$$

und unsere Gleichung geht in die Form:

$$Mx^2 + Ny^2 + Rx + Sy + F = 0 \qquad \text{(Gl. 3)}$$

und wir haben dann in die Gleichungen für M, N, R und S zu setzen, da:

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + tg^2 2\alpha}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + 4p^2}}$$

und somit:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{\pm\sqrt{1+4p^2}+1}{\pm2\sqrt{1+4p^2}}}.$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{\pm\sqrt{1+4p^2}-1}{\pm2\sqrt{1+4p^2}}}.\ ^{1})$$

---

1) Wir müssen zum Verständnisse des Ganzen hier ein wenig in das Gebiet der ebenen Trigonometrie eingreifen, um etwa entstehende Zweifel zu vermeiden. Unsere Gleichungen für *sin* α und *cos* α geben uns wie wir sehen vier Werthe, wir müssten desshalb auch vier Werthe für die Axen der Hyperbel erhalten, was eben nicht leicht denkbar ist, denn es kann *cos* α und *sin* α nur einen möglichen Werth haben und es frägt sich nun, welches Zeichen, das positive oder das negative, soll man in den genannten Gleichungen, als das Anzuwendende ansehen.

Da *tang* 2α einen positiven Werth hat, so ist es klar, dass der Winkel von $2\alpha^0$ nur zwischen 0^0 und 90^0 oder zwischen 180^0 und 270^0 liegen kann, somit liegt auch der Winkel α nur zwischen 0^0 und 45^0 oder zwischen 90^0 und 135^0. Für alle diese Winkel ist aber *sin* α stets positiv und nur der *cos* α kann positiv und negativ sein. Für diese Winkel aber liegt der *sinus* stets zwischen 0 und $\sqrt{1/2}$ oder zwischen 1 und $\sqrt{1/2}$, während der *cosinus* zwischen $\sqrt{1/2}$ und 1 oder zwischen 0 und $-\sqrt{1/2}$ liegen muss. Diese Eigenschaft wollen wir benützen, um unsere Zweifel zu heben.

Setzen wir also der Reihe nach $p = o$ und $p = \infty$ (indem p aller möglichen Werthe unserer Annahme zur Folge fähig ist) in die vier möglichen Werthe von:

$$\cos\alpha = +\sqrt{\frac{+\sqrt{1+4p^2}+1}{2\sqrt{1+4p^2}}}\ ; \quad \cos\alpha = -\sqrt{\frac{+\sqrt{1+4p^2}-1}{+2\sqrt{1+4p^2}}};$$

$$\sin\alpha = +\sqrt{\frac{+\sqrt{1+4p^2}+1}{2\sqrt{1+4p^2}}}\ ; \quad \sin\alpha = +\sqrt{\frac{+\sqrt{1+4p^2}+1}{+2\sqrt{1+4p^2}}};$$

so erhalten wir folgendes Schema:

für $\cos = +\sqrt{\frac{+\sqrt{1+4p^2}+1}{2\sqrt{1+4p^2}}}$ von $p = o$ bis ∞ wird $\cos\alpha = o$ bis $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ also $\alpha = 0^0 - 45^0$,

für $\cos = +\sqrt{\frac{-\sqrt{1+4p^2}+1}{-2\sqrt{1+4p^2}}}$ von $p = o$ bis ∞ wird $\cos\alpha = 0$ bis $-\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ also $\alpha = 90^0 - 135^0$,

für $\sin = +\sqrt{\frac{+\sqrt{1+4p^2}-1}{2\sqrt{1+4p^2}}}$ von $p = o$ bis ∞ wird $\sin\alpha = o$ bis $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ also $\alpha = 0^0 - 45^0$,

für $\sin = +\sqrt{\frac{+\sqrt{1+4p^2}-1}{+2\sqrt{1+4p^2}}}$ von $p = o$ bis ∞ wird $\sin\alpha = o$ bis $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ also $\alpha = 90^0 - 135^0$.

ist, die folgenden Werthe:

$$M = \frac{1-\sqrt{1+4p^2}}{2}$$

$$N = \frac{1+\sqrt{1+4p^2}}{2} \text{ [1])}$$

$$R = +2q\sqrt{\frac{\sqrt{1+4p^2}-1}{2\sqrt{1+4p^2}}}$$

$$S = -2q\sqrt{\frac{\sqrt{1+4p^2}+1}{2\sqrt{1+4p^2}}}\,.$$

Es handelt sich nun noch in unserer Gleichung:

$$Mx^2 + Ny^2 + Rx + Sy + F = 0$$

diejenigen Glieder, welche x oder y in der ersten Potenz enthalten, wegzuschaffen, was wir dadurch am besten bezwecken, dass wir jetzt den Coordinaten-Mittelpunkt verändern, während wir die neuen Axen zu den schon um α^0 gedrehten parallel lassen. Setzen wir also in dieser unserer Gleichung folgende Werthe:

$$x = x + d \text{ und auch } y = y + \delta$$

wobei d und δ die Coordinaten unseres neuen Coordinaten-Mittelpunktes sein sollen, so erhalten wir folgende neue Gleichung:

$$Mx^2 + Ny^2 + (2Md + R)x + (2N\delta + S)y + Md^2 +$$
$$+ N\delta^2 + Rd + S\delta + F = 0.$$

Wenn wir in dieser Gleichung:

$$d = -\frac{R}{2M} \quad \text{und} \quad \delta = -\frac{S}{2N}$$

setzen, so fallen die Glieder mit x und y in der ersten Potenz weg, und wir erhalten:

$$Mx^2 + Ny^2 + Md^2 + N\delta^2 + Rd + S\delta + F = 0$$

Man sieht also, dass wenn man $\alpha = 0^0 - 45^0$ annimmt, $\sqrt{1+4p^2}$ als positiv und $\cos\alpha$ sowohl als $\sin\alpha$ positiv sind und wenn $\alpha = 90 - 135^0$ gesetzt wird, man $\sqrt{1+4p^2}$ als negativ und ebenso $\cos\alpha$ als negativ annehmen muss, während $\sin\alpha$ auch positiv bleibt.

[1]) Siehe A. Burg's Lehrbuch der höheren Mathematik S. 173, Bd. II.

oder statt d und δ ihre Werthe gesetzt erhalten wir auch:

$$Mx^2 + Ny^2 + \frac{R^2}{4M} + \frac{S^2}{4N} - \frac{R^2}{2M} - \frac{S^2}{2N} + F =$$
$$= Mx^2 + Ny^2 + \left(F - \frac{R^2}{4M} - \frac{S^2}{4N}\right) = 0. \qquad \text{(Gl. 4)}$$

Setzen wir nun oben in die von d und δ die entsprechenden Werthe M, N, R und S, so bekommen wir endlich die Gleichungen:

$$\delta = + \frac{2q}{1 + \sqrt{1 + 4p^2}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{1 + 4p^2} - 1}{2\sqrt{1 + 4p^2}}}$$
$$d = - \frac{2q}{1 - \sqrt{1 + 4p^2}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{1 + 4p^2} + 1}{2\sqrt{1 + 4p^2}}}.$$

Der Werth von P in unserer Gleichung 4 ist offenbar:

$$P = 1 - \frac{R^2}{4M} - \frac{S^2}{4N}$$

oder wenn man statt M, N, R und S die ihnen entsprechenden Werthe setzt, so erhält man:

$$P = 1 - \left(\frac{(\sqrt{1+4p^2} - 1)}{(1 + \sqrt{1+4p^2})\sqrt{1+4p^2}} + \frac{(\sqrt{1+4p^2} + 1)}{(1 - \sqrt{1+4p^2})\sqrt{1+4p^2}}\right) \frac{4q^2}{4}$$
$$= 1 + \frac{q^2}{p^2} = \frac{p^2 + q^2}{p^2}.$$

Somit ist die Gleichung unserer Curve folgende:

$$- \frac{\sqrt{1 + 4p^2} - 1}{2} x^2 + \frac{\sqrt{1 + 4p^2} + 1}{2} y^2 + \frac{p^2 + q^2}{p^2} = 0. \qquad \text{(Gl. 5)}$$

Die Axen der Curve sind hiernach:

$$a = \frac{1}{p} \sqrt{- \frac{2(p^2 + q^2)}{\sqrt{1 + 4p^2} - 1}}$$
$$b = \frac{1}{p} \sqrt{+ \frac{2(p^2 + q^2)}{\sqrt{1 + 4p^2} + 1}}.$$

Wir ersehen aus diesen beiden Gleichungen, dass die imaginäre Axe unserer Zonenlinie mit der von uns mit x bezeichneten neuen Coordinatenaxe zusammenfällt, während die Hauptaxe mit jener y identisch ist. Die negative Axe schliesst also mit unserer alten Coordinatenaxe den Winkel α (wobei α zwischen 0^0 und 45^0 liegt)

während die Hauptaxe den Winkel $90^0 + \alpha$ mit dieser einschliesst. Würden wir in unserer ganzen Ableitung unseren Winkel α zwischen 90^0 und 135^0 angenommen haben, so würden wir, wie aus obiger Anmerkung zu ersehen ist, immer statt $+\sqrt{1+4p^2}$ den Werth $-\sqrt{1+4p^2}$ zu setzen gehabt haben, und wieder a als die Hauptaxe und b als die imaginäre Axe der Hyperbel erhalten haben.

Wir wollen noch zum Schlusse dieses Paragraphes die in denselben enthaltenen Resultate übersichtlich darstellen. Die Längen der Axen der Hyperbel (wobei die imaginäre Axe nach dem allgemeinen Gebrauche mit b benannt ist) sind folgende:

$$a = \frac{1}{p}\sqrt{\frac{2(p^2+q^2)}{\sqrt{1+4p^2}+1}}$$

$$b = \frac{1}{p}\sqrt{-\frac{2(p^2+q^2)}{\sqrt{1+4p^2}-1}}\,.$$

Die Coordinaten des Mittelpunktes dieser Hyperbel sind, wobei sich d auf x und δ auf y bezieht:

$$d = -\frac{2q}{1-\sqrt{1+4p^2}}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{1+4p^2}+1}{2\sqrt{1+4p^2}}}$$

$$\delta = +\frac{2q}{1+\sqrt{1+4p^2}}\sqrt{\frac{\sqrt{1+4p^2}-1}{2\sqrt{1+4p^2}}}$$

und endlich die Steigung der imaginären Axe gegen unsere Coordinate x ist α wobei:

$$tang\, 2\alpha = +2p$$

ist und α stets zwischen 0^0 und 45^0 angenommen wird, wo also dann ist:

$$sin\,\alpha = +\sqrt{\frac{+\sqrt{1+4p^2}-1}{+2\sqrt{1+4p^2}}} \quad \text{und} \quad cos\,\alpha = +\sqrt{\frac{+\sqrt{1+4p^2}+1}{+2\sqrt{1+4p^2}}}\,.$$

§. 4.

Wir kommen nun dahin die Gleichungen der Assymtoten der Hyperbel:

$$x^2 - 2pxy - 2qy + 1 = 0 \qquad \text{(Gl. 1)}$$

zu bestimmen. Es sei zu diesem Behufe $oxyx'y'$ unser Coordinatensystem und AVW sowie $A'V'W'$ Fig. 2. die beiden Äste unserer Hyperbel, welche der Gleichung 1 entspricht, so sind dann offenbar die Coordinaten des Mittelpunktes M:

$$d = -\frac{2q}{1-\sqrt{1+4p^2}}\sqrt{\frac{\sqrt{1+4p^2}+1}{2\sqrt{1+4p^2}}}$$

$$\delta = +\frac{2q}{1+\sqrt{1+4p^2}}\sqrt{\frac{\sqrt{1+4p^2}-1}{2\sqrt{1+4p^2}}}.$$

Der Winkel $\pi MB'$ ist α, somit $\pi MA = 90^0 - \alpha = \beta$, also ist auch:

$$tang\,\beta = cotang\,\alpha = \frac{1}{tang\,\alpha}$$

und wenn ML und MN die beiden Assymtoten unserer Hyperbel sind, so ist dann auch:

$$tang\,AML = tang\,\gamma = \pm\frac{b}{a}$$

und somit auch Winkel $\pi ML = \beta + \gamma = \delta$, somit auch:

$$tang\,.\,\delta = \frac{tang\,\beta + tang\,\gamma}{1 - tang\,\beta\,.\,tang\,\gamma} = \frac{1 + tang\,\alpha\,.\,tang\,\gamma}{tang\,\alpha - tang\,\gamma}$$

und da $tang\,\alpha$ den Werth hat:

$$tang\,\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}} = \sqrt{\frac{\sqrt{1+4p^2}-1}{\sqrt{1+4p^2}+1}}$$

und auch $tang\,\gamma$ den Werth gesetzt:

$$tang\,\gamma = \pm\frac{b}{a} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{1+4p^2}-1}{\sqrt{1+4p^2}+1}}$$

so folgt auch, $tang\,\alpha = tang\,\gamma$, oder auch:

$$tang\,\delta = \frac{1 + \frac{\sqrt{1+4p^2}-1}{\sqrt{1+4p^2}+1}}{\sqrt{\frac{\sqrt{1+4p^2}-1}{\sqrt{1+4p^2}+1}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{1+4p^2}-1}{\sqrt{1+4p^2}+1}}}.$$

Man hat also für den Winkel δ zwei Werthe, nämlich:

$$tang\,\delta' = \frac{M}{o} = \infty$$

$$tang\,\delta'' = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{4p^2}}}{\left(\sqrt{\sqrt{1+4p^2}+1}\right).\sqrt{\sqrt{1+4p^2}-1}} = \frac{1}{2p}\sqrt{1+\frac{1}{4p^2}}$$

und da $tang\,\delta^1 = \infty$ einem Winkel $= 90^0$ entspricht, so folgt, dass eine Assymtote der Hyperbel immer parallel mit unserer Coordinate Oy also stets vertical ist, ihre Gleichung ist also:

$$x = d.$$

Der Winkel NMP' ist aber $= 180^0 — NMP = 180 — 2NMA = = 180 — 2\alpha$. Die zweite Assymtote ist dann immer eine Linie, welche durch den Mittelpunkt der Hyperbel geht, und mit der Axe der y einen Winkel von $180^0 — 2\alpha$ oder mit der Axe der x einen solchen von $90^0 — 2\alpha$ einschliesst. Ihre Gleichung ist also:

$$y — \delta = (x — d)\,tang\,(90 — 2\alpha)$$

oder auch auf die gewöhnliche Form gebracht:

$$y = x\,.\,tang\,(90 — 2\alpha) + (\delta — d\,.\,tang\,.\,(90 — 2\alpha))$$

oder auch, da $tang\,(90 — 2\alpha) = cotang\,2\alpha = \frac{1}{tang\,2\alpha} = +\frac{1}{2p}$ ist, hat man:

$$y = +\frac{x}{2p} + \left(\delta - \frac{d}{2p}\right).$$

Setzt man in diese Gleichung die oben gefundenen Werthe von d und δ, so hat man dann die Gleichung nur als eine abhängige von p und q, wobei dann p und q die schon oben angegebenen folgenden Werthe haben:

$$p = +\frac{1}{2}\cdot\frac{p'p''(m''n' - n''m')}{m'm''(n'p'' - p'n'')}\,.$$

$$q = -\frac{1}{2}\cdot\frac{n'n''(m''p' - m'p'')}{m'm''(n'p'' - p'n'')}\,.$$

welche Werthe auch bereits aus der graphischen Kreis-Methode bekannt sind.

§. 5.

Es kann somit keiner Schwierigkeit mehr unterliegen, unsere Zonenlinie im Schema zu construiren, wenn zwei ihr angehörige Flächenorte gegeben sind. Es seien zu diesem Behufe die beiden Punkte M', M'' in unserem Schema durch ihre Coordinaten $M'P'$, $M''P'$, OP' und OP'' gegeben. Wir müssen nun vorerst unseren Zonenkegel, der eben diesen beiden Punkten entspricht, construiren. Wir machen also $OR = 1$ und der Punkt R sei in der horizontalen Projection in R', so ist, wenn $R^1 D^1$ (Fig. 3) ebenfalls $= 1$ ist. PEb die horizontale Projection unserer Projectionsebene, ferner seien M' und M'' die horizontalen Projectionen von unseren Punkten M' und M'', welche offenbar in der Linie PEb liegen müssen. Zieht man nun die Linien Om' und Om'' durch die Punkte M' und M'', und in der horizontalen Projection die Linien $R'm_1'$ und $R'm_1''$, so sind offenbar die Punkte m_1' und m_1'' die Projectionen, der den Flächenorten M' und M'', entsprechenden Flächen, nach der „graphischen Kreismethode", und der durch R', m_1' und m_1'' gezogene Kreis ist dann die Zonenlinie dieser beiden Flächen nach der graphischen Kreismethode und die Linien OK' und OK'' bilden also die Grenzen des Zonenkegels in der verticalen Projection. Im Kreuzrisse ist also $O'K'''K''''$ die Projection unseres Zonenkegels und DD'' ist die Projection unserer Projectionsebene im Kreuzrisse ebenso wie K''' $O'K''''$ die Grenzen unseres Zonenkegels sind. Die Erzeugenden O' K'''' und $O'K'''$ unseres Kegels werden von der Projection der Projectionsebene in E' und E'' geschnitten, welche also die höchsten Punkte unserer Hyperbel sind und welche also horizontale Tangenten haben. Sie erscheinen in der verticalen Projection in den Punkten E und Eo und unsere Zonenlinie hat also in der verticalen Projection in E und Eo horizontale Tangenten. Es ist also auch die Linie EEo ein Durchmesser unserer Hyperbel, folglich erhalten wir leicht den Mittelpunkt derselben, wenn wir die EEo in M halbiren, wobei dann also $MEo = ME = \frac{EEo}{2}$ ist. Der Mittelpunkt unseres Kreises $Rm_1' m_1''$ ist in den drei verschiedenen Projectionen S, S' und S'' und es ist somit $RS = p$, $R''S'' = q$ und $R'S' = \sqrt{p^2 + q^2}$. Wir erhalten also zur Bestimmung des Mittelpunktes einer Zonen-Hyperbel folgende einfache Regel: Man trage sich auf zwei verticalen Linien OR und $O''R''$ (Fig. 4) die Länge $= 1$ auf und bekommt dadurch

die Punkte O und O'', mache $RS = p$ und $R''S'' = q$, sowie auch $S''K'_{,} = S''K'''' = \sqrt{p^2 + q^2}$, ziehe durch D (wobei $R''D = 1$ ist) eine zur Linie $O''R''$ parallele Linie, wodurch man die beiden Punkte E' und E'' und zieht durch dieselben zur RR'' parallele Linien, bis sie die OS treffen, man bekommt dadurch die Punkte E und Eo, welche einen Durchmesser der zu suchenden Hyperbel bestimmen. Der Punkt M ist dann, wie wir schon eben gesehen, der Mittelpunkt unserer Curve. Durch den Punkt M gehen dann die beiden Assymtoten der zu suchenden Hyperbel, von denen die eine, wie wir im vorigen Paragraphe gesehen haben, vertical, also die Linie ML ist, während die andere mit dieser einen Winkel $\beta = 2\alpha$ einschliesst, wo dann $tang\ \beta = + 2p$ ist. Man macht zu diesem Behufe $MF = 1$ und $NF = 2p$, so ist dann die Linie MN die zweite Assymtote unserer Hyperbel. Der Neigungswinkel der beiden Assymtoten der Hyperbel ist, da auch β zwischen 0^0 und 90^0 liegt, auch zwischen diesen Grenzen eingeschlossen.

Nun hat man von der zu bestimmenden Zonenlinie den Mittelpunkt, die beiden Assymtoten und einen Punkt (obwohl drei Punkte der Hyperbel im Schema schon gegeben sind, genügt hier doch zur Bestimmung der Curve nur einer und es können dann die übrigen zur Controle benützt), sie kann also leicht bestimmt werden.

Man bedarf nämlich zur Bestimmung der Zonenlinie selbst die Werthe oder Linien der Axen a und b der Hyperbel. Wir bestimmen also die Coordinaten des einen Punktes der Hyperbel, sie seien x_1 und y_1, so hat man bekanntlich die Gleichung:

$$a^2 y_1{}^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2,$$

wenn die allgemeine Gleichung unserer Hyperbel ist:

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2,$$

oder man hat auch:

$$\frac{a^2}{b^2}\, y_1{}^2 - x_1{}^2 = - a^2$$

oder auch:

$$a^2 = x_1{}^2 - \frac{a^2}{b^2}\, y_1{}^2,$$

und da uns $\frac{a^2}{b^2}$ gegeben ist durch die Gleichung $= \frac{1}{tang\ \alpha}$, wobei $tang\ 2\alpha = + 2p$ ist, so sei auch $\frac{a^2}{b^2} = m^2$, dann hat man:

$$a = \sqrt{x_1^2 - m^2 y_1^2}$$

und dann hat man auch die Gleichung:

$$b = \sqrt{y_1^2 - \frac{x_1^2}{m^2}},$$

diese beiden Werthe von a und b sind aber leicht zu construiren, und können, da die Richtungen der Axen im Schema bereits durch die Assymtoten bestimmt sind, leicht eingetragen und somit auch die Curve selbst ohne Anstand bestimmt werden.

Die Werthe von p und q können ebenfalls leicht constuirt werden, indem wir den Flächenort der graphischen Kreismethode jeder der beiden gegebenen Flächenorte bestimmen, hieraus die Zonenlinie bestimmen und die Coordinaten des Mittelpunktes derselben sind dann die zu bestimmenden Grössen von p und q.

§. 6.

Für den Fall, dass in unserer allgemeinen Gleichung:

$$x^2 - 2pxy - 2qy + 1 = 0 \qquad \text{(Gl. 1)}$$

die Grösse $p = 0$ wird, geht offenbar diese Gleichung in folgende über:

$$x^2 - 2qy + 1 = 0,$$

welche Gleichung aber, da $B^2 - 4AC = 0$ ist, die Gleichung einer Parabel ist, deren Hauptaxe mit der Axe der y zusammenfällt, deren Scheitel vom Coordinaten-Mittelpunkte um die Grösse $-\frac{1}{2q}$ entfernt ist und deren Parameter $2q$ ist.

Setzen wir in allen unseren Gleichungen, welche wir in §. 3 und 4 entwickelt haben, $q = 0$, so sehen wir dass:

$$d = 0 \text{ und } \delta = 0$$

wird, dass also der Mittelpunkt dieser Hyperbel mit dem Coordinaten-Mittelpunkt zusammenfällt, ferner erhalten wir auch für die Axen die Werthe:

$$a = \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4p^2}}}$$

$$b = \sqrt{-\frac{2}{\sqrt{1 + 4p^2} - 1}}$$

Die Neigung der Axe der b gegen die Axe der x unseres Coordinatensystems bleibt aber:

$$tang\ 2\alpha = 2p.$$

Wenn aber $p = 0$ werden soll, so muss auch:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{n' n'' (m'' p' - p'' m')}{p' p'' (m'' n' - m' n'')} = 0$$

sein, es muss also für diesen Fall entweder $n' = 0$, oder $n'' = 0$, oder $m'' p' = p'' m'$, d. i. $\frac{m''}{p''} = \frac{m'}{p'}$ sein, ebenso muss, wenn $q = 0$ sein soll, $m' = 0$ oder $m'' = 0$, oder $n'' p' = p'' n'$, d. i. $\frac{p'}{n'} = \frac{p''}{n''}$, wobei $a_{,} : b_{,} : c_{,} = m_{,}\ a : n_{,}\ b : p_{,}\ c$ und $a_{,,} : b_{,,} : c_{,,} = m_{,,}\ a : n_{,,}\ b : p_{,,}\ c$ die gegebenen Flächen sind.

§. 7.

Wir wollen nun die Coordinaten der Durchschnittspunkte zweier Zonen-Hyperbeln bestimmen, d. i. jene Fläche finden, die zugleich in beiden Zonen liegt. Es seien hierzu:

$$x^2 - 2pxy - 2qy + 1 = 0 \qquad \text{(Gl. 1)}$$

$$x^2 - 2p_1 xy - 2q_1 y + 1 = 0 \qquad \text{(Gl. 2)}$$

die beiden Gleichungen unserer Zonenlinien, wobei p, q, p_1 und q_1 die, die Zonen bestimmenden, von den Abmessungen der Krystallflächen abhängigen Grössen sind. Um nun aus diesen beiden Gleichungen die Coordinaten x_1 und y_1 des Durchschnittspunktes zu erhalten, müssen wir sie coincidiren lassen und erhalten also:

$$x_1^2 - 2px_1 y_1 - 2qy_1 + 1 = 0$$
$$x_1^2 - 2p_1 x_1 y_1 - 2q_1 y_1 + 1 = 0$$

und wenn wir beide Gleichungen von einander abziehen, so erhalten wir

$$x_1 \cdot y_1 \cdot 2(p_1 - p) + 2(q_1 - q) y_1 = 6,$$

woraus folgt:

$$x_1 = -\frac{q_1 - q}{p_1 - p}$$

und wenn wir diesen Werth in eine der beiden obigen Gleichungen setzen, so erhalten wir:

$$y_1 = \frac{1}{2} \frac{(q_1 - q)^2 + (p_1 - p)^2}{(p_1 - p)(p^1 q - q_1 p)}.$$